

Программа первого зачёта

Индукция

- 1 Докажите, что уравнение $2m^2 = n^2$ не имеет решений в натуральных числах.
- 2 Докажите, что любое натуральное число можно представить как сумму нескольких разных степеней двойки (возможно, включая и нулевую).
- 3 Игра «Ханойская башня» имеет три стержня. На одном находится пирамидка из восьми колец (уменьшающихся снизу вверх). Эту пирамидку нужно переложить на другой стержень, соблюдая правила игры: нельзя переносить сразу несколько колец и нельзя класть большее кольцо поверх меньшего.
 - а) Докажите, что в игре можно победить.
 - б) Какое наименьшее число ходов для этого потребуется?
- 4 Найдите ошибку в доказательстве утверждения A_n .
 - а) A_n : «Если треугольник разбит на n $\triangle$ -ов, то хотя бы один из них не остроугольный»

База. A_2 верно, так как если треугольник разбит на два треугольника, то пара углов этих треугольников дополняют друг друга до развёрнутого, так что один из них не острый.

Шаг. Рассмотрим треугольник, разбитый на n треугольников. Разобьём один из них на два. Так как один из двух новых треугольников не остроугольный, утверждение A_{n+1} выполнено. $\square$

- б) A_n : «Любые n точек лежат на одной прямой»

База. A_1 и A_2 верны, так как по аксиоме планиметрии любые две точки лежат на одной прямой.

Шаг. Рассмотрим произвольные точки $p_1, \dots, p_{n+1}$. По предположению индукции, первые n точек лежат на некоторой прямой l . Аналогично, последние n точек лежат на прямой l' . Так как l и l' пересекаются в точках p_2 и p_n , они совпадают. Значит, $p_1, \dots, p_{n+1}$ лежат на одной прямой. $\square$

- в) A_n : «Если в связном графе с n вершинами степень каждой вершины не меньше 2, то при удалении любого ребра он останется связным»

База. A_3 верно, так как при удалении ребра из треугольника он остаётся связным.

Шаг. Рассмотрим граф с n вершинами и добавим к нему ещё одну. Если из неё выходит хотя бы два ребра, то при удалении любого из них вершина остаётся соединённой со старым графом. При удалении ребра из старого графа он остаётся связным по предположению индукции. $\square$

Комбинаторика

- 5 Сколько есть слов длины n из нулей и единиц?
- 6 Сколько есть подмножеств у множества из n элементов?
- 7 Сколькими способами n человек могут встать в очередь?
- 8 Сколько есть слов длины n из k букв? А слов без повторяющихся букв?
- 9 Установите взаимно-однозначные соответствия между элементами следующих множеств:
 - ★ множество сочетаний из n по k , т.е. способов выбрать k объектов из n объектов;
 - ★ множество слов длины n , составленных из букв A и B , в которых ровно k букв A ;
 - ★ множество путей из клетки $(1, 1)$ в $(k+1, n-k+1)$ с шагами только вправо или вверх;
 - ★ множество k -элементных подмножеств множества из n элементов.
- 10 Формула биномиальных коэффициентов.
- 11 Треугольник Паскаля.
- 12 Бином Ньютона.
- 13 Тожества: а) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; б) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$; в) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$;
г) $\binom{n}{k}(n-k) = \binom{n}{k+1}(k+1)$.

Нужно привести комбинаторные доказательства всех тождеств, а некоторых из них доказать через формулу биномиальных коэффициентов; треугольник Паскаля (по индукции); бином Ньютона.

Множества

- 14** Множество, подмножество, элемент множества. Пустое множество. Принадлежность и включение.
- 15** Способы задания множества: (1) перечислением элементов; (2) специальным обозначением (например, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$); (3) выделением по свойству: $\{x \in U \mid x \text{ обладает некоторым свойством}\}$.
- 16** Операции над множествами: объединение, пересечение и разность множеств. Доказательство и опровержение тождеств.
- 17** Декартово произведение множеств. Число элементов в декартовом произведении конечных множеств.

Графы

- 18** Граф, вершина, ребро. Определение графа на языке теории множеств. Петли и кратные рёбра.
- 19** Степень вершины. Сумма степеней вершин графа вдвое больше числа рёбер. Лемма о рукопожатиях. Полный граф. Число рёбер в полном графе.
- 20** Изоморфные графы. Дополнение к графу.
- 21** Связный граф. Компонента связности. Двудольный граф. Ориентированный граф.
- 22** Докажите, что среди 6 человек найдутся трое попарно знакомых или трое попарно не знакомых.
- 23** Критерий существования эйлера цикла.

Вопросы для подготовки

Могут быть заданы вопросы, похожие на эти.

- 24** Как доказать, что одно множество не является подмножеством другого?
- 25** Верно ли, что для любых множеств A, B, C
- а)** $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$; **б)** $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cap (B \cup C) = \emptyset$.
- 26** Может ли в двудольном графе с пятью вершинами быть пять рёбер? шесть рёбер? девять рёбер?
- 27** В двух графах одинаково число рёбер и число вершин и, более того, наборы степеней вершин одинаковы. Означает ли это, что графы изоморфны?
- 28** Разбейте графы, изображённые на рисунке ниже, на группы изоморфных.
- 29** Рассмотрим граф, вершины которого — это все клетки доски 8×8 а рёбра — пары клеток, связанных одним ходом шахматной фигуры. Сколько всего рёбер в графе **а)** ладьи; **б)** короля?
- 30** Сколько существует трёхзначных чисел, делящихся хотя бы на одно из чисел 9 и 15?
- 31** Азбука Морзе кодирует буквы и цифры последовательностями сигналов двух типов (точка и тире), длины от 1 до 5. Можно ли обойтись более короткими последовательностями?
- 32** Кодовый замок имеет девять кнопок. Известно, что для открытия двери нужно набрать код из трёх различных кнопок в определённом порядке. Сколько разных вариантов такого кода может быть? Тот же вопрос, если для открытия замка нужно нажать на три кнопки одновременно.
- 33** Сколько существует трёхзначных чисел, в записи которых есть и чётные, и нечётные цифры?
- 34** Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые в выражении $(1 + x^5 + x^7)^{20}$. Чему равен коэффициент при x^{13} ; x^{17} ; x^{26} ; x^{29} ?
- 35** Сколько различных буквенных сочетаний можно составить, переставляя буквы слова: кот; парк; папка; оооолооолоооо; математика?
- 36** Сколько есть способов переставить буквы в слове «математика» так, чтобы на месте гласных были гласные, а на месте согласных — согласные?

